ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КАРТ
УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Уравнивание. Уравнивание геодезических сетей является важнейшим этапом их создания. Основная задача уравнивания – получить однозначные результаты по отягощенным погрешностями измерениям, но исправленным в ходе обработки так, чтобы точность всех величин не понизилась, а наоборот, стала выше. Эта задача решается методом наименьших квадратов (МНК) [3, 4].

После уравнивания по методу наименьших квадратов точность измеренных величин *всегда повышается* [2, с. 231]. Важной характеристикой измерения является его вес, определяющий степень доверия к измерению. Из формулы «*среднего отношения весов*» следует, что отношение весов P уравненных и p неуравненных результатов измерений *в среднем* определяется отношением числа измеренных величин n к числу неизвестных k, что всегда больше единицы:

$$\left(\frac{P}{p}\right)_{ср} = \frac{n}{k} > 1.$$

Первое изложение элементов МНК, как и его название, дал французский математик А.М. Лежандр (1752–1833). Дальнейшее развитие МНК получил в трудах немецкого ученого К.Ф. Гаусса (1777–1855), французского математика П.С. Лапласа (1749–1827), российских ученых П.Л. Чебышева (1821–1894), А.А. Маркова (1856–1922) и многих других. В этом направлении продолжают плодотворно работать многие математики и геодезисты и в настоящее время.

Известно несколько способов уравнивания. Основными являются *параметрический* и *коррелатный* способы. Кроме них существуют и так называемые комбинированные способы, сочетающие достоинства упомянутых основных.

Уравнивание может выполняться на плоскости, на эллипсоиде или в пространстве. В данной лекции, учитывая задачи и возможности курса, этот важнейший метод будет затронут лишь в очень ограниченных пределах.

Точность измерений. Точность – важнейшая характеристика измерений. Мерой точности измерения является погрешность (ошибка) измерений[1]. Величина ошибки характеризует близость результатов измерений к их истинным значениям. Чем ошибка меньше, тем выше точность, тем результаты ближе к истинным значениям.

В процессе измерений всегда участвуют *субъект*, проводящий эти измерения, *технология* измерений, включающая методы и приборы измерений, *объект*, свойства которого предстоит выяснить в результате измерений, и *внешняя среда*, в которой проводятся измерения. Все они являются источниками ошибок. *Основной тезис* измерений – *неизбежность ошибок*. Результаты любых измерений *всегда отягощены ошибками*.

Принципы организации измерений. Борьба с погрешностями измерений основана на четырех принципах: ослабления, обнаружения, исправления и допуска погрешностей.

- ***Принцип ослабления*** погрешностей предполагает меры по предотвращению или ослаблению их влияний. Он основывается на выявлении и анализе источников погреш-

[1]В метрологии различают термины *погрешность* и *ошибка*. Погрешность измерения имеет и величину, и знак. Например, угол измерен с погрешностью -5”. Ошибка – случайное дискретное событие, которое может произойти или не произойти. Например, при измерениях ногой задели треногу, на которой был установлен геодезический прибор. В геодезии эти термины используются как синонимы.

ностей и предполагает глубокое знание факторов, влияющих на измерения. Исходя из этих знаний, организуются измерения и их обработка.

- ***Принцип обнаружения*** погрешностей предполагает принятие мер по их выявлению. Для этого выполняются ***избыточные*** измерения. Например, угол измеряется несколько раз, в треугольнике измеряют все три угла, отметку нового репера определяют проложением нивелирных ходов от нескольких исходных реперов и т.п. При избыточности данных в геодезических сетях из-за погрешностей не выполняются геометрические условия и возникают ***невязки***. Невязки являются индикаторами наличия погрешностей и объективными характеристиками точности измерений.
- ***Принцип исправления*** погрешностей предполагает применение теорий, аппаратуры и технологий ослабления влияний или полное устранение обнаруженных ошибок. Этой же цели служит теория погрешностей и теория обработки результатов измерений - ***уравнивание***. Уравнивание можно выполнить только при наличии избыточных измерений.
- ***Принцип допуска*** погрешностей. Всех погрешностей не избежать, не обнаружить и не исправить, а при исправлении могут возникнуть новые ошибки. Поэтому необходимо сознательно и обоснованно установить допустимые пределы погрешностей, по превышении которых результаты измерений бракуются, а измерения выполняются заново. В связи с этим в геодезии важное место занимает теория оценки точности результатов измерений (длин, углов, превышений) и функций от измеренных величин (уравненных значений координат, азимутов и длин линий).

Погрешности измерений и их числовые характеристики. Погрешность – отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины.

По влиянию на результаты измерений различают: *систематическую* и *случайную* составляющие погрешности. Систематическая погрешность составляет ту часть погрешности измерения, которая при повторных измерениях одной и той же величины остается постоянной или закономерно изменяющейся. Случайная погрешность – это составляющая погрешности измерения, которая изменяется случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины. Если погрешность измерений существенно превышает ожидаемую при данных условиях, то ее называют *грубой* погрешностью.

Геодезические измерения всегда организуют так, чтобы грубые погрешности (описки, просчеты, нарушения технологии производства измерений и т. п.), а также, если это возможно, и систематические погрешности были своевременно выявлены и исключены из результатов измерений. Случайные погрешности неизбежны. Их влияние можно лишь ослабить, совершенствуя приборы, методику, увеличивая количество и точность измерений, а также надлежащей математической обработкой результатов.

Теория погрешностей измерений базируется на положениях теории вероятностей и математической статистики. Полагаем, что основные понятия этих дисциплин известны. Напомним наиболее важные из них, ограничившись рассмотрением непрерывных случайных величин.

На первый взгляд кажется, что для случайных погрешностей не существует какой-либо закономерности. В действительности они, как и другие случайные величины, подчинены определенному статистическому закону распределения. Закон распределения представляют функцией распределения $F(x)$ и ее производной $\varphi(x)$, называемой плотностью распределения. Функция распределения определяет вероятность P того, что случайная величина X примет значение, меньшее некоторой заданной величины x:

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx,$$

при условиях

$$\varphi(x) \geq 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1.$$

Важнейшими числовыми характеристиками случайной величины являются *математическое ожидание* $M(x)$ и *дисперсия* σ^2.

Математическое ожидание определяет центр, около которого сосредоточены все возможные значения случайной величины. При наличии только случайных погрешностей оно определяет истинное значение измеряемой величины. Вычисляется математическое ожидание по формуле:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx.$$

Математическое ожидание обладает свойствами:

$M(c) = c$, где c – постоянная величина,
$M(cx) = cM(x)$,
$M\left(\sum c_i x_i\right) = \sum c_i M(x_i)$, где Σ – знак суммы,
$M\left(\prod x_i\right) = \prod M(x_i)$, где Π – знак произведения,
$M(x - M(x)) = 0$ – математическое ожидание уклонений от математического ожидания равно нулю.

Дисперсия характеризует рассеяние возможных значений случайной величины относительно математического ожидания. В качестве меры рассеяния берут математическое ожидание квадрата уклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$\sigma^2 = D(x) = M\left((x - M(x))^2\right).$$

Положительный квадратный корень из дисперсии называют средним квадратическим отклонением (СКО) или средней квадратической погрешностью (СКП):

$$\sigma = \sqrt{D(x)}.$$

Дисперсия обладает следующими свойствами:

$D(c) = 0$, где c – постоянная величина,
$D(cx) = c^2 D(x)$,
$D\left(\sum c_i x_i\right) = \sum c_i^2 D(x_i)$,
$\sigma^2 = M(x^2) - (M(x))^2$.

Предельные погрешности. Практически важно знать вероятность того, что погрешность находится в определенных границах. С решением этой задачи связан вопрос установления *допусков* $\Delta_{пр}$ на предельные погрешности измерений, по превышении которых измерения следует браковать и выполнять их повторно. Допуск на абсолютные значения погрешностей устанавливают по величине СКП, умноженной на некоторый коэффициент t:

$$\Delta_{пр} = \pm t\sigma.$$

Выбор коэффициента t основан на законе распределения случайных погрешностей. Случайные погрешности измерений Δ характеризуются математическим ожиданием $M(\Delta) = 0$ и дисперсией σ^2. Они возникают вследствие влияния множества независимых факторов и поэтому в большинстве случаев подчинены *нормальному* (Гаусса) закону распределения. Обозначив

$$t = \Delta / \sigma,$$

для плотности и функции нормального распределения соответственно получают:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2},$$

$$F(t) = (1 + \Phi(t))/2,$$

где $\Phi(t)$ – интеграл вероятностей Лапласа, равный

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt,$$

Интеграл удобно вычислять по следующей эмпирической формуле [1]:

$$\Phi(t) = 1 - \exp\left(-0{,}794t\left(1 + 0{,}418t + 0{,}028t^2\right)\right).$$

Эти формулы отражают известные свойства нормально распределённых случайных ошибок:

- одинаковые по абсолютной величине положительные и отрицательные погрешности встречаются одинаково часто;
- малые погрешности встречаются чаще больших;
- среднее из погрешностей стремится к нулю при неограниченном возрастании их количества;
- при заданных условиях измерений погрешности по абсолютной величине не превосходят некоторого предела.

Вероятность того, что погрешности по модулю не превысят заданного предела $t\sigma$, равна

$$P(|\Delta| < t\sigma) = \Phi(t).$$

На практике обычно пользуются коэффициентами t = 2; 2,5 и 3. Им соответствуют вероятности $\Phi(t)$ = 0,954; 0,988 и 0,997. Погрешность $|\Delta| > 3\sigma$ уверенно считают грубой: вероятность такого события всего 0,003 – оно может произойти лишь в трех случаях из тысячи. В геодезии также принимают величины t = 2, и t = 2,5.

Вес измерения. Измерения подразделяют на *равноточные* и *неравноточные*. Неравноточные измерения сравнивают по величинам их весов. Вес p определяет степень доверия к результату. Его вычисляют по формуле:

$$p = \sigma_o^2 / \sigma^2,$$

где p и σ^2 – вес и дисперсия измерения, σ_o^2 – параметр, выбирается произвольно, но так, чтобы веса измерений стали близкими к единице. Если p = 1, то дисперсия этого измерения становится равной параметру σ_o^2. Иными словами параметр равен дисперсии тех измерений, веса которых равны единице. Для краткости его называют *дисперсией единицы веса*.

При подсчёте весов используют эмпирические дисперсии. Например, если уравнивают углы и длины сторон, измеренные соответственно с эмпирическими дисперсиями s_β^2 и s_s^2, то, приняв $\sigma_o^2 = s_\beta^2$, для весов получают:

$$p_\beta = 1, \quad p_s = s_\beta^2 / s_s^2.$$

Как известно, при уравнивании, если измерения некоррелированы, минимизируется некоторая функция Φ, содержащая взвешенную (p) сумму квадратов поправок (v) в измерения:

$$\Phi = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots$$

Если поправки определены, тогда можно оценить и параметр σ_o^2. Для этого в функции Φ веса p следует заменить их выражениями и вынести за знак суммы дисперсию единицы веса:

$$\Phi = [pv^2] = \sigma_o^2 [v^2 / \sigma^2],$$

где, в соответствии с символикой Гаусса, ломаные скобки обозначают сумму заключенных в них величин. В ломаных скобках безразмерные величины – отношения квадратов поправок к соответствующим им дисперсиям. Такие суммы подчиняется распределению *хи-квадрат* χ^2. Математическое ожидание этой суммы равно числу степеней свободы ($n – k$), где n – число измеренных величин в сети, k – число искомых неизвестных. Для дисперсии единицы веса получаем:

$$\sigma_o^2 = [pv^2]/(n-k).$$

Веса удобны тем, что их можно определять по косвенным соображениям, не зная точных значений дисперсий.

Дисперсии равноточных измерений одинаковы, их веса $p_i = 1$.

Оценки математических ожиданий и дисперсий. На практике точные значения математических ожиданий и дисперсий обычно неизвестны. Приходится пользоваться их оценками. Приведем формулы вычисления по результатам измерений оценок математического ожидания и дисперсии единицы веса. Оценкой математического ожидания неравноточных измерений является *среднее весовое*:

$$\overline{x} = [xp]/[p],$$

Эту формулу можно сделать более удобной для вычислений. Введём нормированные веса, выберем наименьшее значение x_0 из x и вычислим их разности ε:

$$\tilde{p}_i = p_i / [p], \quad \varepsilon = x - x_0, \quad x = x_0 + \varepsilon.$$

Для среднего весового получаем:

$$\overline{x} = x_0 + [\tilde{p}\varepsilon], \qquad [\tilde{p}] = 1.$$

Для n равноточных измерений (p = 1) среднее весовое становится средним арифметическим:

$$\overline{x} = [x]/n,$$

$$\overline{x} = x_0 + [\varepsilon]/n.$$

Оценки s_o^2 дисперсии единицы веса σ_o^2 вычисляют в зависимости от имеющегося материала. Если известны истинное значение X, истинные погрешности $\Delta_i = x_i – X$, число n измерений x_i, тогда

$$s_o^2 = [p\Delta^2]/n.$$

Если истинное значение неизвестно, оценка выполняется по отклонениям v_i текущего измерения x_i, число которых n, от среднего значения $\overline{x}$:

$$v_i = x_i - \overline{x}.$$

Тогда

$$s_o^2 = [pv^2]/(n-1),$$

$$[pv^2] = [p]\left([\tilde{p}\varepsilon^2] - [\tilde{p}\varepsilon]^2\right).$$

Вычисленные средние значения и дисперсии неизбежно содержат погрешности. Погрешности в значениях $\overline{x}$ и s_o оцениваются соответственно по формулам:

$$s_o/\sqrt{[p]},\quad s_o/\sqrt{2(n-1)}\,.$$

О точности числовых характеристик судят также по *доверительным интервалам*, которые строят с близкой к единице вероятностью (1 – α). Для доверительных интервалов математического ожидания и дисперсии единицы веса имеем:

$$(\bar{x}-t_\nu s_o/\sqrt{\sum p})<M(x)<(\bar{x}+t_\nu s_o/\sqrt{\sum p})\,,$$
$$s_o^2(n-1)/\chi_1^2<\sigma_o^2<s_o^2(n-1)/\chi_2^2\,,$$

где $\nu = (n-1)$ – число степеней свободы; t_ν – статистика распределения Стьюдента, выбирается из таблиц по значениям ν и (1 – α); статистики распределения *хи-квадрат* выбирают из таблиц: χ_1^2 по значениям ν и α/2, χ_2^2 – по значениям ν и (1 – α/2).

В табл. 9.1 даны выдержки из упомянутых таблиц при значении α = 0,05.

Таблица 9.1

Статистики распределений Стьюдента и χ^2

ν	5	10	25	60	120
t_ν	2,57	2,22	2,06	2,00	1,98
χ_1^2	12,8	20,5	40,6	83,3	152,2
χ_2^2	0,83	3,25	13,1	40,5	91,6

Статистическую связь между случайными переменными X_i и X_j характеризует *ковариация* или *корреляционный момент* σ_{ij}. Он определяется математическим ожиданием произведений отклонений измеренных величин x_i и x_j от своих математических ожиданий:

$$v_i = x_i - M(x_i),$$
$$v_j = x_j - M(x_j),$$
$$\sigma_{ij} = M(v_i v_j).$$

Часто статистическую связь между случайными величинами характеризуют безразмерным коэффициентом корреляции r:

$$r_{ij} = \sigma_{ij}/\sigma_i\sigma_j\,.$$

Отсюда, используя понятие веса, получают:

$$\sigma_{ij} = \sigma_i\sigma_j r_{ij} = \sigma_o{}^2 r_{ij}/\sqrt{p_i p_j}\,.$$

В этой формуле ковариация выражена через дисперсию единицы веса, коэффициент корреляции и веса измерений.

Оценку коэффициента корреляции получают, заменив математические ожидания и дисперсии их оценками:

$$r_{ij} = \sum(x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j)/s_i s_j n.$$

Коэффициент корреляции находится в пределах -1 … +1. Чтобы выяснить, являются ли случайные величины в корреляционной зависимости, нужно проверить значимость коэффициента корреляции. Для этого вычисляют статистику

$$t = r\sqrt{(n-2)/(1-r^2)}\,.$$

Эта величина t имеет распределение Стьюдента с $\nu = (n-2)$ степенями свободы. По уровню значимости α и числу ν находят по таблицам распределения Стьюдента статистику $t_{\nu\alpha}$, удовлетворяющую условию

$$P\left(|t| \geq t_{\nu\alpha}\right) = \alpha .$$

Если $|t| \geq t_{\nu\alpha}$, то связь между переменными полагают существенной.

Случайный вектор и его числовые характеристики. В геодезических измерениях имеют дело не с одной или двумя, а с системой из n случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n.$ В совокупности они образуют n-мерный случайный вектор

$$X = \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)^T .$$

Элементами вектора являются, например, измеренные в геодезической сети углы, длины линий, превышения и другие величины.

Обобщением понятия математического ожидания случайной величины является *математическое ожидание случайного вектора*

$$M\left(X\right) = \left(M\left(X_1\right), M\left(X_2\right), \ldots, M\left(X_n\right)\right)^T .$$

Его элементами являются математические ожидания случайных величин. Обобщением понятий дисперсий и ковариаций является *ковариационная матрица случайного вектора*

$$K = M\left(\left(X - M\left(X\right)\right)\left(X - M\left(X\right)\right)^T\right).$$

Ковариационная матрица K имеет n строк и n столбцов. Она симметрична относительно главной диагонали. На этой диагонали расположены дисперсии, а вне диагонали – ковариации случайных величин:

$$K_{ii} = \sigma_i^2, \quad K_{ij} = K_{ji} = \sigma_{ij} .$$

На основании понятий о весах и коэффициентах корреляции ковариационную матрицу вектора представляют в виде

$$K = \sigma_o^2 Q = \sigma_o^2 P^{-1} .$$

Матрицу Q называют *матрицей обратных весов*. Она симметрична относительно главной диагонали. Элементы на этой диагонали содержат обратные веса измерений, а недиагональные элементы – обратные веса и коэффициенты корреляции:

$$Q_{ii} = 1/p_i; \; Q_{ij} = Q_{ji} = r_{ij} / \sqrt{p_i p_j} .$$

Матрицу

$$P = Q^{-1}$$

называют *матрицей весов*. Если измерения некоррелированы, все $r = 0$, то матрицы Q и P диагональные.

Ковариационные матрицы имеют большое значение для оценки точности функций от измеренных величин, например, полученных по результатам уравнивания значений координат, углов, длин и азимутов линий и др. После уравнивания эти величины уже являются *функциями* всех измерений. Поэтому рассмотрим подробнее, как определить корреляционную матрицу этих функций.

Предположим, некий вектор Y является линейной функцией случайного вектора X:

$$Y = AX + b,$$

где вектор b и матрица A имеют постоянные элементы. Если известна ковариационная матрица K_X случайного вектора X, то ковариационную матрицу K_Y вектора Y находят из выражения:

$$K_Y = M\left(\left(Y - M\left(Y\right)\right)\left(Y - M\left(Y\right)\right)^T\right).$$

Но

$$M(Y) = M(AX + b) = AM(X) + b.$$

Отсюда следует

$$K_Y = AM\Big((X - M(X))(X - M(X))^T\Big)A^T.$$

Следовательно,

$$K_Y = AK_X A^T.$$

Эта формула является одной из важнейших при оценках точности геодезических результатов. Применим её для вычисления дисперсии σ_Y^2 некоторой функции случайного вектора

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

В общем случае эта функция нелинейная. Для ее приведения к линейному виду каждый её аргумент представляют в виде суммы постоянной (основной) и случайной (малой) частей:

$$X_i = X_{oi} + v_i.$$

Функция раскладывается в ряд Тейлора, и сохраняется только линейная часть ряда:

$$Y = Y_o + AV,$$

$$Y_o = f(X_{o1}, X_{o2}, \ldots, X_{on}),$$

$$A = \left(a_1 = \frac{\partial f}{\partial X_1}, a_2 = \frac{\partial f}{\partial X_2}, \ldots, a_n = \frac{\partial f}{\partial X_n}\right),$$

$$V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T.$$

Число Y_o – постоянная величина. Случайным является вектор V. Если матрица обратных весов случайного вектора V равна Q, то дисперсии функции Y равна

$$\sigma_Y^2 = \sigma_o^2 AQA^T.$$

Параметрический способ уравнивания. Параметрический способ - один из основных. Пусть измерено n величин, по которым необходимо определить k неизвестных параметров. Уравнивание возможно, если число измеренных величин больше числа искомых параметров:

$$n > k.$$

При уравнивании параметрическим способом каждая измеренная величина должна быть записана в виде функции от определяемых параметров. Например, измеренное превышение между двумя реперами будет функцией высот этих реперов, а измеренное расстояние между двумя пунктами – функцией координат этих пунктов. В общем случае n-мерный вектор *уравненных* измерений L_a представляют в виде явной функции k-мерного вектора *уравненных* значений параметров X_a:

$$L_a = F(X_a).$$

С учетом поправок V в измеренные величины L_b и поправок dX в приближенные значения параметров X_0 получают:

$$L_b + V = F(X_o + dX).$$

Если эта функция нелинейная, разложением в ряд Тейлора её приводят к линейному виду и получают n *уравнений поправок*:

$$V = AdX + l.$$

Элементами матрицы A являются частные производные каждой функции уравнений поправок, а их n, по каждому параметру, число которых k:

$$A = \left(a_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right)_{X_o} \right), \quad (i = 1,2,\ldots, n, \ j = 1,2,\ldots,k).$$

Вектор l, *свободный член*, содержит разности вычисленных по приближенным параметрам значений измеряемых величин и их значений, полученных непосредственно из измерений:

$$l = F(X_o) - L_b .$$

Пример. Составление этих уравнений поясним на примере нивелирной сети, когда проложен нивелирный ход между пунктами i и k. Пусть приближенные высоты этих пунктов будут H_{oi} и H_{ok}, а измеренное превышение – h_{ik}. Поправки из уравнивания в высоты и в превышение обозначим соответственно через dx_i, dx_k и v_{ik}. Очевидно, уравненное превышение между двумя реперами равно разности уравненных высот этих реперов:

$$v_{ik} + h_{ik} = (H_{ok} + dx_k) - (H_{oi} + dx_i).$$

Отсюда следует уравнение поправок

$$v_{ik} = -dx_i + dx_k + l_{ik} ,$$

$$l_{ik} = (H_{ok} - H_{oi}) - h_{ik} .$$

В геометрическом нивелировании дисперсия σ^2 погрешностей превышений растет с ростом L длины хода:

$$\sigma^2 = \mu^2 L .$$

Допустимые невязки в нивелирных ходах оцениваются величинами $\mu\sqrt{L}$ (мм), где L – длина хода в километрах. Значения μ для нивелировок 1, 2, 3, 4 классов и технического нивелирования соответственно равны 3, 5, 10, 20 и 50 миллиметрам на 1 километр хода.

Вес измерения при длине нивелирного хода L_{ik} вычисляется по формуле

$$p_{ik} = \frac{\sigma_o^2}{\mu^2 L} = \frac{c}{L_{ik}} .$$

Если нивелирный ход проложен на местности с крутыми склонами и много нивелирных станций, то вес определяется формулой

$$p_{ik} = \frac{c}{n_{ik}} ,$$

где n_{ik} – количество нивелирных станций.

В формулах для вычисления весов коэффициент c – произвольная величина. Она выбирается, например, как среднее из значений длин нивелирных ходов, а при крутых склонах – среднее из числа установок нивелира. В этом случае значения весов становятся близкими к 1.

Нормальные уравнения. В параметрическом случае уравнивания минимизации подлежит целевая функция

$$\Phi = V^T P V .$$

Её первая производная приравнивается нулю:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial dX} = 2V^T P \frac{\partial V}{\partial dX} = 2V^T P A = 0 .$$

Отсюда следует важное для параметрического способа уравнение:

$$A^T P V = 0 .$$

Из этого выражения, с учетом формулы для вычисления вектора V, получают систему так называемых *нормальных уравнений*:

$$(A^T P A) dX + A^T P l = 0 .$$

Их решением будет вектор поправок в параметры

$$dX = -\left(A^T PA\right)^{-1} A^T Pl \ .$$

Исправленные значения параметров равны

$$X_a = X_o + dX \ .$$

Поправки в измерения и исправленные значения измеренных величин равны

$$V = AdX + l, \quad L_a = L_b + V \ .$$

В целях оценки точности получают:

- выражение для дисперсии единицы веса

$$\sigma_o^2 = \frac{V^T PV}{n-k},$$

$$V^T PV = V^T Pl = l^T PV,$$

- формулу ковариационной матрицы параметров dX

$$\sigma_o^2 Q_{dX} = \sigma_o^2 \left(A^T PA\right)^{-1}.$$

Обратим внимание на следующее – матрица обратных весов искомых параметров Q_{dX} равна обратной матрице $(A^TPA)^{-1}$ коэффициентов нормальных уравнений. Отметим также, что матрица коэффициентов нормальных уравнений симметрична относительно главной диагонали:

$$\left(A^T PA\right) = \left(A^T PA\right)^T,$$

что используется в качестве контроля при уравнительных вычислениях.

Таким образом, алгоритм параметрического способа уравнивания сводится к вычислению приближенных значений параметров, вычислению коэффициентов уравнений поправок, элементов весовых или ковариационных матриц, составлению и решению нормальных уравнений, исправлению найденными из уравнивания поправками приближенных значений параметров и измеренных величин и оценке точности полученных результатов.

Уравнивание многократной линейно-угловой засечки. В этой засечке (рис. 9.1) измеряемой величиной является горизонтальный угол (β) между опорным направлением и направлением на определяемый пункт (P) и расстояние (S) от опорного до определяемого пунктов. И расстояние, и угол могут быть измерены, например, электронным тахеометром. Угол и расстояние однозначно определяют искомые координаты пункта. Однако, если измерения повторить с нескольких опорных пунктов, образовать многократную линейно-угловую засечку, то к решению задачи необходимо привлечь метод наименьших квадратов, и воспользоваться приведенными выше формулами параметрического уравнивания.

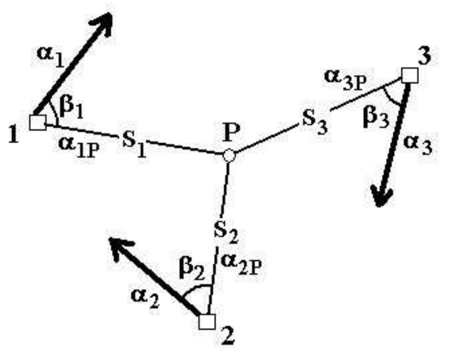

Рис. 9.1. Многократная линейно-угловая засечка

Измеренные величины содержат погрешности, и после уравнивания их предстоит исправить поправками (v). Для решения задачи надо знать приближенные координаты определяемого пункта (x_0, y_0). Их можно найти, например, решением простой линейно-угловой засечки, исполненной с одного опорного пункта. После уравнивания к приближенным координатам будут получены поправки (δx, δy). Предположим, уравнивание выполнено и все поправки определены. Тогда для наблюдений, например, с опарного пункта 1(x_1, y_1), можно записать следующих два уравнения связи:

$$v_{\beta 1} + \beta_1 = \alpha_{1P} - \alpha_1 = \operatorname{arctg}\frac{y_0 + \delta y - y_1}{x_0 + \delta x - x_1} - \alpha_1,$$

$$v_{S1} + S_1 = \sqrt{(x_0 + \delta x - x_1)^2 + (y_0 + \delta y - y_1)^2}\ .$$

Раскладывая в ряд Тейлора, нелинейные функции приводим к линейному виду. В случае измерения углов получаем:

$$v_{\beta 1} + \beta_1 = \alpha_{1P} - \alpha_1 = \alpha_{01P} - \frac{\sin\alpha_{01P}}{S_{01}}\delta x + \frac{\cos\alpha_{01P}}{S_{01}}\delta y - \alpha_1,$$

где через α_{01P} обозначен дирекционный угол направления на определяемый пункт, вычисленный по приближённым координатам.

В этом уравнении поправка в угол получится в радианах. Представим её в угловых секундах, умножив коэффициенты перед поправками в координаты на число секунд в радиане ρ''=206265. Свободный член в уравнении поправок тоже должен быть выражен в угловых секундах. Предположим, что расстояния в данном примере составляют лишь сотни метров. Чтобы уменьшить величины коэффициентов, выразим расстояния в миллиметрах. Например, S_1=436487 мм. Поправки в приближенные координаты искомого пункта также будут получены в миллиметрах. Для коэффициентов и свободного члена будем иметь:

$$a_1 = -\frac{206265}{S_{01}}\sin\alpha_{01P}, \quad b_1 = \frac{206265}{S_{01}}\cos\alpha_{01P},$$

$$l_{\beta 1} = \alpha_{o1P} - \alpha_1 - \beta_1.$$

Уравнение поправок для угловых измерений примет вид:

$$v_{\beta 1} = a_1\delta x + b_1\delta y + l_{\beta 1}.$$

Напомним, что поправка в угол и свободный член выражены в секундах угла, а поправки в координаты – в миллиметрах.

Аналогично следует поступить с линейными измерениями. После разложения функции в ряд Тейлора и обозначения через S_{01} расстояния, вычисленного по приближенным координатам, получим:

$$v_{S1} + S_1 = S_{01} + \frac{x_0 - x_1}{S_{01}}\delta x + \frac{y_0 - y_1}{S_{01}}\delta y.$$

Обозначим коэффициенты и свободный член следующим образом:

$$c_1 = \cos\alpha_{01P} = \frac{x_0 - x_1}{S_{01}}, \quad s_1 = \sin\alpha_{01P} = \frac{y_0 - y_1}{S_{01}}, \quad l_{S1} = S_{01} - S_1.$$

Для уравнения поправок имеем:

$$v_{S1} = c_1\delta x + s_1\delta y + l_{S1}.$$

Поправка в расстояние и свободный член должны быть выражены в миллиметрах.

Система уравнений поправок в матричной записи примет вид:

$$V = AdX + l\ .$$

Для засечки рис. 9.1 имеем:

$$V = \left(v_{\beta 1}, v_{\beta 2}, v_{\beta 3}, v_{S1}, v_{S2}, v_{S3}\right)^T,$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}, \quad dX = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix},$$

$$l = \left(l_{\beta 1}, l_{\beta 2}, l_{\beta 3}, l_{S1}, l_{S2}, l_{S3}\right)^T.$$

Теперь предстоит разобраться с диагональной матрицей весов P.

Подбору весов следует уделять серьёзное внимание. Веса определяют доли влияния разных измерений. Поправки в измерения будут вычисляться в соответствии с установленными весами. Поясним это на примере, не связанном с геодезией. Двоим предстоит разделить некий доход. Доход будет разделён пропорционально весам, определяющим степень участия каждого. Вес одного 1, а вес второго 10. Второму достанется в десять раз больше, нежели первому. Если веса определены неправильно, то распределение дохода тоже будет неверным.

Матрица весов P является диагональной (обозначена фигурными скобками):

$$P = \left\{p_{\beta 1} \quad p_{\beta 2} \quad p_{\beta 3} \quad p_{S1} \quad p_{S2} \quad p_{S3}\right\}.$$

Вес для углового и линейного измерения определяется формулами:

$$p_\beta = \frac{c}{\sigma_\beta^2}, \quad p_S = \frac{c}{\sigma_S^2}.$$

В знаменателях весов выписаны дисперсии измерений углов и дисперсии измерений длин. Дисперсии обычно неизвестны, поэтому их вычисляют, используя эмпирические оценки СКО. В числителе находится произвольная безразмерная величина c [5, с. 96]. Она подбирается так, чтобы веса были близки к единице. Если СКО измерения углов $s_\beta = 5''$, а СКО измерения расстояний s_s = 5мм, то надо принять с = 25, все веса станут равными единице. Для весов измеренных углов и длин линий будем иметь [2, с. 210]:

$$p_\beta = \frac{25}{s_\beta^2} = 1\frac{1}{('')^2}, \quad p_S = \frac{25}{s_S^2} = 1\frac{1}{(мм)^2}.$$

Все дальнейшие вычисления выполняются по формулам параметрического уравнивания.

Уравнивание нивелирной сети методом узлов. Применяется параметрический способ уравнивания, решаемый последовательными приближениями. При этом отпадает необходимость в составлении и решении приведённых выше уравнений. Для простоты рассмотрим уравнивание небольшой нивелирной сети (рис. 9.2). На чертеже заглавными буквами А, Л, С обозначены исходные пункты с известными высотами. Новые репера помечены римскими цифрами I, II. Над (под) этими точками указаны отметки, найденные в процессе уравнивания. Между реперами проложены ходы геометрического нивелирования. На рис. 9.2 подписаны длины ходов, и стрелками показаны направления положительных превышений. В табл. 9.2 приведены результаты вычислений. Рассмотрим последовательность обработки.

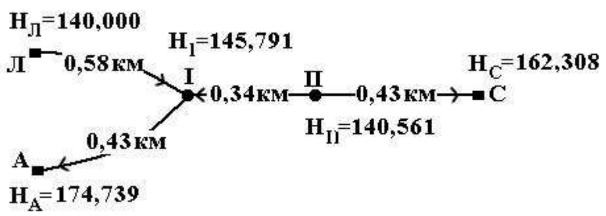

Рис. 9.2. *Нивелирная сеть*

1. Вычисления весов (при длине эталонного хода L_0=0,43 км) и нормированных весов:

$$p_{ik} = \frac{0{,}43}{L_{ik}}, \quad \tilde{p}_{ik} = p_{ik}/[p].$$

Нормируют веса всех ходов, связанных с пунктом I и отдельно с пунктом II. По каждому определяемому пункту сумма нормированных весов равна единице.

Таблица 9.2

Уравнивание нивелирного хода методом узлов

Репера		**Измеренные превышения h (м)**	**Веса**		**Приближения**				**Уравненные превышения h (м)**	**V (мм)**	**pV (мм)**	**pV^2**
			p	**$\tilde{p}$**	**$H^{(1)}$**	**$H^{(2)}$**	**$H^{(3)}$**	**$H^{(4)}$**				
I	А	-28,958	1,00	0,33	145,781	781	781	781	-28,948	+10	+10	100
	Л	+5,798	0,74	0,24	145,798	798	798	798	+5,791	-7	-5	35
	II	+5,233	1,27	0,43	145,791	793	795	794	+5,230	-3	-4	12
	Сумма		**3,01**	**1,00**	**145,789**	**790**	**791**	**791**			**+1**	
II	С	-21,743	1,00	0,43	140,565	565	565	565	-21,747	-4	-4	16
	I	-5,233	1,27	0,57	140,556	557	558	558	-5,230	+3	+4	–
	Сумма		**2,27**	**1,00**	**140,560**	**562**	**561**	**561**			**0**	**163**

2. Вычисление простейшими путями приближённых отметок каждого определяемого репера. Используются измеренные превышения. После этого все пункты будут иметь отметки.

3. Последовательными приближениями для каждого определяемого репера вычисляются отметки со всех ближайших к нему пунктов. Для пункта I отметки будут вычислены с реперов А, Л, II. Из этих трёх отметок вычисляется среднее весовое описанным выше способом:

$$\overline{H} = H_0 + [\tilde{p}\varepsilon], \quad \varepsilon = H_i - H_0, \quad [\tilde{p}] = 1.$$

После этого переходят к пункту II и повторяют выше указанные вычисления. Вновь возвращаются к пункту I, и вычисляют новое среднее весовое значение, используя последний результат отметки для пункта II. Приближения повторяются до тех пор, пока не совпадут по всем определяемым пунктам результаты двух последних приближений.

4. Выполняется оценка точности результатов уравнивания. Вычисляются по уравненным и исходным отметкам превышения h, и разности v уравненных и измеренных превышений. Для каждого определяемого пункта сумма $[pv]=0$. Вычисляется СКП единицы веса и СКП на 1 км хода (n – число ходов, k – число узлов):

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}, \quad \mu = \sigma_0 / \sqrt{L_0}\ .$$

В данном примере для этих величин получено соответственно 9 мм и 14 мм.

Коррелатный способ уравнивания. Коррелатный способ практически применим к небольшим сетям, когда в геодезической сети сравнительно просто сформировать геометрические условия. В большой сети условий очень много. Задача уравнивания существенно усложнится. Число условий определяется числом избыточно измеренных величин.

Случайный n-мерный вектор уравненных результатов измерений L_a связан r условиями

$$F(L_a) = 0\ .$$

Условия могут иметь нелинейный вид. Условия приводятся к линейному виду при помощи матрицы частных производных B:

$$B = \left(b_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial L_j} \right)_{X_0 L_b} \right), \quad (i = 1,2,\ldots,r,\ j = 1,2,\ldots,n).$$

Получают так называемые *условные уравнения* и *вектор невязок*, вычисляемый по вектору L_b результатов измерений:

$$BV + W = 0,$$
$$W = F(L_b).$$

В геодезических сетях всегда предусматриваются избыточные измерения. Каждое избыточное измерение приводит к появлению геометрического условия и невязки.

Приведем примеры условных уравнений.

- В нивелирных сетях возникают условия двух видов:
  - в замкнутом полигоне сумма превышений должна равняться нулю;
  - в разомкнутом полигоне, проложенном между двумя исходными реперами, высоты которых не подлежат исправлению, сумма превышений должна равняться разности высот этих реперов.
- В триангуляции много условий. Рассмотрим лишь одно: в плоской замкнутой фигуре, в которой измерены все внутренние углы, возникает *условие фигур*. Суть условия в том, что сумма всех углов должна равняться их теоретическому значению. Например, в плоском треугольнике, в котором измерены все углы, их сумма должна равняться 180°.
- При использовании глобальных спутниковых систем позиционирования по измерениям получают вектор, соединяющий наземные станции (*базисный или пространственный вектор*). Вид условных уравнений зависит от того, как проложен векторный ход.
  - Если этот ход образует замкнутый контур и все векторы ориентированы по часовой стрелке (или против часовой стрелки), то их сумма равна нулю. Это означает, что суммы приращений координат по каждой координатной оси в замкнутой фигуре равны нулю.
  - Когда ход разомкнут и проложен между векторами двух опорных пунктов, координаты которых не подлежат исправлению, то сумма одинаково ориентированных векторов должна равняться разности векторов этих опорных пунктов.

Вследствие неизбежных погрешностей в измерениях геометрические условия не выполняются. Возникают невязки. Например, если сумма измеренных углов в плоском треугольнике больше 180° на 10″, то возникнет невязка w = +10″.

При коррелатном способе уравнивания минимизируется следующая функция Лагранжа:

$$\Phi = V^T PV - 2K^T (BV + W),$$

где K – вектор *коррелат* (неопределённых множителей)

Первая производная этой функции приравнивается нулю:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial V} = 2V^T P - 2K^T B = 0.$$

Отсюда

$$PV = B^T K.$$

Для вектора поправок получают:

$$V = P^{-1}B^T K.$$

Подставляя V в условные уравнения, получают систему *нормальных уравнений*:

$$BP^{-1}B^T K + W = 0.$$

Из решения системы нормальных уравнений определяется вектор коррелат:

$$K = -\left(BP^{-1}B^T\right)^{-1}W.$$

Зная вектор коррелат, вычисляют вектор поправок и исправляют измерения:

$$L_a = L_b + V.$$

По исправленным измерениям вычисляют все искомые параметры.

Для дисперсии единицы веса и ковариационной матрицы поправок в измерения при r избыточно измеренных величинах имеются формулы:

$$\sigma_o^{\ 2} = \frac{V^T PV}{r},$$

$$V^T PV = -K^T W = -W^T K.$$

Доказывается, что допустимая невязка в i-м условном уравнении определяется формулой:

$$\left(w_i\right)_{\text{доп}} = \pm t\sigma_{\text{o}}\sqrt{\left(BP^{-1}B^T\right)_{ii}},$$

где $t = 2$; 2,5 или 3; под квадратным корнем находится диагональный элемент i-й строки (столбца) матрицы коэффициентов нормальных уравнений.

Чтобы оценить точность определяемых величин, например, высот искомых пунктов, необходимо составить функцию их зависимости от уравненных величин:

$$F = F\left(L_a\right).$$

В общем случае такая функция является нелинейной. Её приводят к линейному виду разложением в ряд Тейлора и сохранением только линейной части ряда:

$$f_1 v_1 + f_2 v_2 + \cdots + f_n v_n + f_0 = 0,$$

где коэффициенты, вычисляемые по измеренным величинам,

$$f_i = \frac{\partial F}{\partial L_i}.$$

Дисперсия функции

$$\sigma_F^2 = \sigma_0^2 fQ_L f^T, \quad f = \left(f_1, f_2, \ldots, f_n\right),$$

$$Q_L = P^{-1} - P^{-1}B^T\left(BP^{-1}B^T\right)^{-1}BP^{-1}.$$

Видим, что точность уравненных величин больше точности измеренных величин, ибо

$$Q_L < P^{-1}.$$

Таким образом, вычислительный алгоритм коррелатного способа уравнивания состоит из формирования геометрических условий, вычисления невязок, условных уравнений, элементов весовых или ковариационных матриц, нормальных уравнений, коррелат, поправок в измерения, искомых параметров и оценки точности полученных результатов.

Уравнивание нивелирной сети способом “красных чисел”. Вариант коррелатного способа уравнивания. Уравнивание выполняется последовательным приближением без составления и использования выше приведенных формул. Метод пригоден для обработки небольших нивелирных и плановых сетей. Изложим методику решения способом *красных чисел*.

1. Работа начинается с составления схемы сети. Чертёж должен быть просторным и удобным для нанесения необходимых записей (рис. 9.3).

2. На чертёж наносятся отметки исходных реперов (по завершении уравнивания туда выписываются и вновь найденные отметки новых реперов). Намечаются полигоны. Их число равно количеству избыточных измерений. В рассматриваемом случае имеются два разомкнутых полигона и должны быть сформулированы два условия. Чтобы лучше выделить полигоны, опорные пункты следует соединить пунктирными линиями. Чертёж станет нагляднее; легче будет избежать ошибок при выборе направлений обхода полигонов. Каждый полигон будем обходить по часовой стрелке. Направления обхода на чертеже показаны красными стрелками. У каждого нивелирного хода следует указать измеренные превышения. Знак превышений должен быть согласован с выбранным направлением обхода полигонов. Если направление нивелирного хода не совпадает с направлением обхода полигона, то знак превышений следует изменить на противоположный.

3. Следует вычислить невязки (w) для каждого полигона и выписать их в середине полигонов. Под невязками нарисовать таблички. В них в ходе уравнивания будут записываться промежуточные значения невязок.

4. Вычислить для каждого хода веса. В данном случае их следует заимствовать из примера уравнивания этой же сети способом узлов. Далее вычисляются обратные веса. Обратные веса нормируются так, чтобы по каждому полигону сумма нормированных весов равнялась единице. Эти вычисления приведены в табл. 9.3.

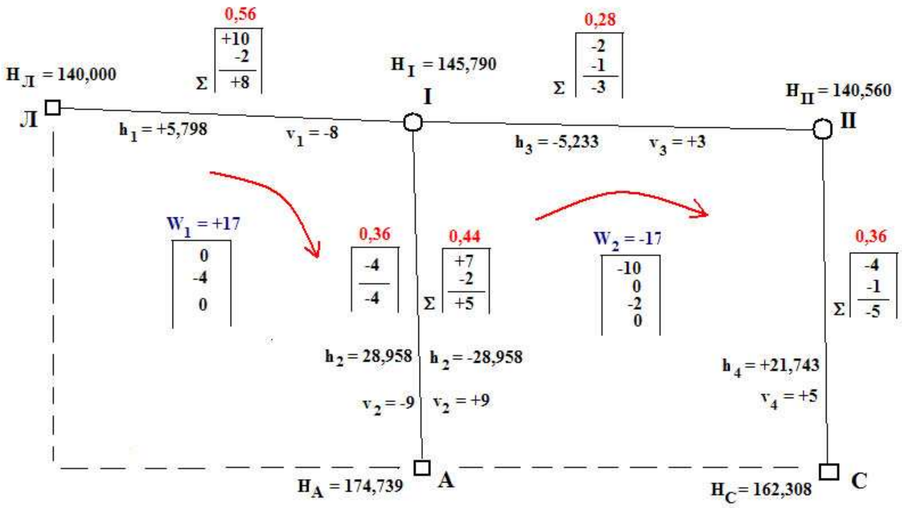

Рис. 9.3. *Уравнивание нивелирной сети способом “красных чисел”*

5. Нормированные обратные веса следует выписать в чертёж у соответствующего нивелирного хода с внешней стороны полигона. Их выписывают красным цветом, что и дало название способу уравнивания. Под красными числами заготавливается табличка, куда будут заноситься результаты вычислений.

6. Далее идёт распределение невязок по ходам полигонов. Начинают с полигона, где наибольшая невязка. Невязку распределяют пропорционально красным числам и записывают в эти заготовленные таблички. В табличке невязок пишется 0 в знак того, что в этом полигоне невязка ликвидирована. Переходят к следующему полигону, в данном случае к второму полигону. При распределении невязок в предыдущем полигоне в ходы, общие для двух полигонов, уже введена поправка. Поэтому её надо учесть и изменить невязку второго полигона. Новая невязка фиксируется в табличке невязок, и новая невязка второго полигона распределяется пропорционально красным числам этого полигона. Возвращаем-

ся в первый полигон, находим его новую невязку и распределяем её пропорционально его красным числам.

Процесс повторяется до получения нулевых невязок во всех полигонах.

Таблица 9.3

Вычисление обратных нормированных весов

№ хода	Вес *P*	Обратный вес 1/P	Нормированные обратные веса
1	0,74	1,30	0,56
2	1,00	1,00	0,44
Σ	-	**2,30**	**1,00**
2	1,00	1,00	0,36
3	1,27	0,79	0,28
4	1,00	1,00	0,36
Σ	**-**	**2,79**	**1,00**

7. Вычисление поправок, уравненных превышений и отметок новых реперов. Во всех табличках красных чисел вычисляются суммы записанных в них чисел. Поправка для хода, общего для двух полигонов, вычисляется как сумма таблички в своем полигоне минус сумма таблички в соседнем полигоне. Для остальных ходов поправка равна сумме таблички, взятой с обратным знаком. Поправки выписываются у ходов с внутренней стороны полигона. Алгебраическая сумма поправок в полигоне должна равняться невязке, взятой с обратным знаком. Измеренные превышения исправляются поправками. По исправленным превышениям вычисляются отметки новых реперов. Их выписывают на чертеже. Для контроля вычисляют невязки по исправленным превышениям. Невязки должны быть нулевыми.

8. Обработка завершается оценкой точности. В данном случае эти действия выполняются тем же образом, что и в способе узлов параметрического уравнивания.

Источники информации Лекции 9

1. Баландин В.Н О вычислении интеграла вероятностей // Геодезия и картография. 1983. №6. С. 26–27.
2. Гайдаев П.А., Большаков В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений. - М., «Недра», 1969. – 400 с.
3. Маркузе Ю.И, Голубев В.В. Теория математической обработки геодезических измерений. Учебное пособие для вузов. – М.: Академический проект: Альма Матер. 2010. –247 с.
4. Машимов М. М. Уравнивание геодезических сетей. – М.: Недра, 1979. С. 21–52.
5. Яковлев Н.В. Высшая геодезия. Учебник для вузов. - М.: Недра. 1989. - 445 с.

Контрольные вопросы

1. В чём суть формулы «*среднего отношения весов*»?
2. В чём суть основного тезиса измерений?
3. Принципы организации геодезических измерений.
4. Допуск на значения погрешностей. Вес измерений. Дисперсия единицы веса. Ковариационная матрица случайного вектора.
5. Суть параметрического способа уравнивания.
6. Алгоритм уравнивания линейно-угловой засечки.
7. Алгоритм уравнивания нивелирной сети способом узлов.
8. Алгоритм коррелатного способа уравнивания.
9. Чем определяется количество невязок в коррелатном способе уравнивания?
10. Алгоритм уравнивания нивелирной сети способом “красных чисел”.